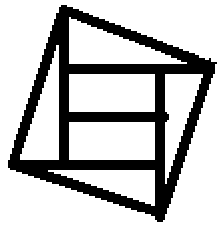
Решения заданий отборочного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.
9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. Разрезать прямоугольник размера 10 на 1 на несколько частей, из которых можно сложить квадрат площади 10. Разрезы должны проходить по отрезкам прямых.

Решение. Будем называть прямоугольник длины ***n*** и ширины 1 полоской длины ***n***. Разрежем прямоугольник 10 на 1 на две полоски длины 3 и две полоски длины 2. Из полосок длины 2 сложим квадрат 2 на 2. Каждую полоску длины 3 разрежем по диагонали на два прямоугольных треугольника с катетами длины 3 и 1 и приложим их к полученному квадрату 2 на 2, как показано на рисунке:



Критерии проверки. (●) Если предложена указанная в авторском решении правильная схема, даже без дополнительных обоснований, ставим 7 баллов. (●) Если предложено некоторое нестандартное разрезание (но верное) и сложение, может понадобиться её обоснование. За его отсутствие можно снять до 2 баллов. (●) Если приведено разрезание и сложение из части кусков квадрата площади меньше 10 – ставим 0 баллов.

9.2. В некоторой группе из не менее, чем трёх человек, произошёл обмен письмами такой, что для каждых двух человек A и B либо A послал письмо B, либо B послал письмо A, но не одновременно и то и другое. Кроме того, для любых трёх человек A, B и C выполняется условие: если A послал письмо B, а B послал письмо C, то и C послал письмо A. Сколько человек может быть в этой группе? Найти все ответы и доказать, что других нет.

Ответ. 3.

Решение. Если количество членов группы не меньше четырёх, то любой её член A послал или получил не меньше трёх писем. Значит, он или получил хотя бы два письма от некоторых B и C, или послал хотя бы два письма некоторым B и C. Тогда тройка членов A, B и C не удовлетворяет условию задачи.

Действительно, в первом случае либо B послал C, C послал A, но и B послал A, а должен был A послать B, либо C послал B, B послал A, но и C послал A, а должен был A послать C - противоречие. Аналогично, во втором случае, либо A послал B, B послал C, но и A послал C, а должен был C послать A, либо A послал C, C послал B, но и A послал B, а должен был B послать A- противоречие.

Значит, количество членов группы равно три, из которых A послал письмо B, B послал письмо C и C послал письмо A.

Критерии проверки. (●) Доказано, что количество членов группы не больше 3, но не указан явно пример для группы из трёх человек: 6 баллов. (●) Приведён пример группы из 3 человек, удовлетворяющий условию: 1 балл.

9.3. На стороне AC остроугольного треугольника ABC, у которого сторона AC длиннее стороны AB. взята точка P такая, что AB=PC, K - середина отрезка AP, M - середина стороны BC. Доказать, что прямая KM параллельна биссектрисе угла BAC.

Доказательство 1. Отметим на стороне AC точку Q такую, что AQ=AB=PC, и обозначим за N середину отрезка BQ. Треугольник ABQ равнобедренный, поэтому прямая AN – биссектриса угла BAC. В треугольнике CBQ отрезок NM является средней линией, поэтому он параллелен стороне AC и равен половине отрезка QC, следовательно, NM равен и параллелен отрезку AK. Значит, четырёхугольник ANMK является параллелограммом, поэтому его сторона KM равна и параллельна стороне AK, лежащей на биссектрисе угла BAC, что и требовалось доказать.
Доказательство 2. Обозначим за T и H середины сторон AC и AB соответственно, четырёхугольник AHMT - параллелограмм. Длина стороны MT равна $\frac{AB}{2}$, длина отрезка KT равна $\frac{AC}{2} - AK = \frac{AC}{2} - \left(\frac{AC}{2} - \frac{AB}{2}\right) = \frac{AB}{2} = MT$, следовательно треугольник MTK является равнобедренным, поэтому его углы MKT и KMT равны. Но и углы MKT и KMH равны, как накрест лежащие, значит равны углы KMT и KMH и прямая KM является биссектрисой угла TMH. Стороны углов TMH и BAC параллельны, следовательно биссектриса KM угла TMH параллельна биссектрисе угла BAC, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. Возможно много схем доказательства, нужно оценивать продвижение и обоснованность шагов в каждой. Скажем, в доказательстве 1: (●) выбор точки N: 1 балл, (●) обоснование, что AN – биссектриса угла BAC: 1 балл, (●)обоснование того, что отрезок NM равен и параллелен отрезку AK: 2 балла, (●)доказательство того, что четырёхугольник ANMK является параллелограммом: 2 балла, (●) вывод о параллельности KM и биссектрисы угла BAC: 1 балл.
В доказательстве 2: (●) Построение параллелограмма AHMT: 2 балла. (●) Подсчёт длины отрезка KT и осознание его равенства MT: 1 балл. (●) Доказательство равенства углов MKT и KMT: 1 балл. (●) Доказательство равенства углов KMT и KMH: 1 балл. (●)Осознание того, что прямая KM является биссектрисой угла TMH: 1 балл. (●)Обоснование того, что биссектриса KM угла TMH параллельна биссектрисе угла BAC: 1 балл.

9.4. Найти все пары простых чисел p и q, для которых обе суммы $p+q$ и $p+4q$ являются квадратами натуральных чисел.
Ответ. $p=13, q=3$ и $p=5, q=11$.
Решение. Запишем $p+q=x^2$ и $p+4q=y^2$, $y>x$, тогда $3q=(y-x)(y+x)$. Ввиду простоты числа q левая часть равенства может быть разложена в произведение двух натуральных чисел ровно двумя способами: $3q=1\cdot 3q=3\cdot q$, поэтому получим два варианта системы уравнений.
1) $y-x=1, y+x=3q$. Тогда $y=x+1, q=\frac{2x+1}{3}$. Эта дробь является целым числом только при $x=3t+1$ для некоторого целого t, и тогда $q=2t+1$. Из первого равенства условия $p=x^2-q=9t^2+4t=t(9t+4)$. Ввиду простоты p один из сомножителей правой части должен равняться 1 или -1. Ясно, что $9t+4$ не может равняться 1 или -1, поэтому либо $t=1$ и $p=13, q=3$, либо $t=-1$ и $p=5, q=-1$, второе не подходит.
2) $y-x=3, y+x=q$. Тогда $y=x+3, q=2x+3$. Из первого равенства условия $p=x^2-q=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Ввиду простоты p один из сомножителей правой части должен равняться 1 или -1. Если $x+1=1$, то $x=0, p=-3$ - не подходит, если $x+1=-1$, то $x=-2, p=5, q=-1$ – тоже не подходит. Если $x-3=1$, то $x=4, p=5, q=11$ - подходит, если $x-3=-1$, то $x=2, p=-3$ – не подходит. Проверка показывает, что обе пары $p=13, q=3$ и $p=5, q=11$ являются решениями.
Критерии проверки. (●) Только угаданы и проверены решения $p=13, q=3$ и $p=5, q=11$: по 1 баллу за каждую угаданную пару. (●) Путём решения составленных уравнений найдено и проверено какое-то одно решение из пунктов 1 и 2: по 3 балла за каждое.

9.5. В каждой клетке доски 7 на 7 записано некоторое действительное число, по модулю не превосходящее 1. Известно, что сумма чисел в любых четырёх клетках, образующих квадрат 2 на 2, равна нулю. Доказать, что сумма 49 чисел, записанных во всех клетках доски не превосходит по модулю 7. Достигается ли эта граница?

Доказательство. Занумеруем горизонтали доски снизу вверх числами от 1 до 7, и вертикали доски слева направо числами от 1 до 7. Отметим на доске 12 квадратов размера 2 на 2 клетки, расположенных следующим образом. Шесть из них лежат «ниже главной диагонали»: три лежат на пересечении пары горизонталей 1, 2 с парами вертикалей 2,3; 4,5; 6,7, ещё два – на пересечении пары горизонталей 3,4 с парами вертикалей 4,5; 6,7, и ещё один – на пересечении пары горизонталей 5,6 с парой вертикалей 6,7. Остальные шесть расположены симметрично первым шести относительно главной диагонали доски, идущей из левого нижнего её угла в правый верхний. А именно, три лежат на пересечении пары вертикалей 1, 2 с парами горизонталей 2,3; 4,5; 6,7, ещё два – на пересечении пары вертикалей 3,4 с парами горизонталей 4,5; 6,7, и ещё один – на пересечении пары вертикалей 5.6 с парой горизонталей 6,7.

Заметим, что три клетки главной диагонали с координатами (2,2), (4,4), (6,6) покрыты этими квадратами дважды, а остальные четыре клетки главной диагонали с координатами (1,1),(3,3),(5,5),(7,7) ими не покрыты. Остальные клетки доски покрыты этими квадратами по одному разу.

Теперь вычтем из общей суммы всех чисел доски сумму всех чисел в этих 12 квадратах, после чего она, с одной стороны, не изменится (сумма всех чисел в этих 12 квадратах равна, по условию, нулю). А с другой стороны, она станет равной сумме чисел в клетках (1,1), (3,3),(5,5),(7,7) минус сумма чисел в клетках (2,2), (4,4), (6,6), числа в остальных клетках доски обнулятся. Каждое из этих семи чисел по модулю не превосходит 1, поэтому сумма их со знаками «+» и «–» не превосходит по модулю 7.

Пример, когда сумма всех чисел на доске равна 7: во всех клетках горизонталей с нечётными номерами стоят 1, а во всех клетках горизонталей с чётными номерами стоят -1.

Критерии проверки. (●) Пример, когда сумма на доске равна 7: 1 балл. (●) Доказательство того, что сумма всех чисел на доске по модулю не превосходит 7: 6 баллов. (●) Может присутствовать доказательство более слабого утверждения – что сумма всех чисел доски по модулю не больше 13: 2 балла.

Это делается аналогично доказательству выше рассмотрением 9 квадратов 2 на 2, составляющих все клетки квадрата 6 на 6, лежащие на пересечении всех горизонталей доски, кроме первой, со всеми вертикалями доски, кроме первой.